Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über die Beziehungen zwischen Integralfunktionen algebraischer Differentialgleichungssysteme**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1919, 13

Es wird für beliebige algebraische Differentialgleichungssysteme die Frage untersucht, von welcher Form eine algebraische Beziehung zwischen algebraischen oder transzendenten Integralfunktionen sein muß, und das gewonnene Resultat auf homogene lineare Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten angewendet.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1919, S. XLII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1919. 13. Abhandlung

Über die Beziehungen zwischen Integralfunktionen algebraischer Differentialgleichungssysteme

Von

LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 27. Oktober 1919

Heidelberg 1919
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1537

Für das Differentialgleichungssystem

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots y_n), \end{cases}$$

in welchem $f_1, f_2, \dots f_n$ algebraische Funktionen von $x, y_1, y_2, \dots y_n$ sind, ist eine Integralfunktion ω durch die in allen Variabeln identische Gleichung definiert:

$$(2)\qquad \frac{\partial \omega}{dx} + \sum_1^n \frac{\partial \omega}{\partial y_r} f_r = 0,$$

der das Integral der Differentialgleichungen (1):

$$\omega(x, y_1, y_2, \dots y_n) = c$$

zugehört, wenn c eine willkürliche Konstante ist.

Sind $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ algebraische oder transzendente Integralfunktionen von (1), so ist, wie unmittelbar zu sehen, auch

$$\omega_\varkappa = \varphi(\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}),$$

wenn φ eine willkürliche Funktion der eingeschlossenen Größen bedeutet, wieder eine Integralfunktion; es soll nun hier die Frage erörtert werden, ob eine Integralfunktion $\omega_\varkappa$ eine *algebraische* Funktion von $x, y_1, y_2, \dots y_n$ und $\varkappa-1$ andern algebraischen oder transzendenten Integralfunktionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ sein kann, und, wenn dies der Fall ist, wie diese algebraische Funktion beschaffen sein muß.

Sei die Integralfunktion $\omega_\varkappa$ mit $x, y_1, \dots y_n, \omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ durch die algebnaische Gleichung verbunden:

$$(3)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m + r_1(x, y_1, \dots y_n, \omega_1, \dots \omega_{\varkappa-1})\, \omega_\varkappa^{m-1} + \cdots \\ &\qquad + r_m(x, y_1, \dots y_n, \omega_1, \dots \omega_{\varkappa-1}) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

in welcher $r_1, \dots r_m$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, oder durch die Gleichung

$$(4)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} g_{0\lambda}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\lambda_1} \omega_2^{\lambda_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} \\ &+ \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} g_{1\mu}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\mu_1} \omega_2^{\mu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &+ \sum_{(\nu)} g_{m\nu}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

in welcher $g_{0\lambda}, g_{1\mu}, \dots g_{m\nu}$ ganze Funktionen bedeuten, und werde angenommen, daß nicht schon zwischen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ und den Variabeln $x, y_1, y_2, \dots y_n$ eine algebraische Beziehung besteht, da sonst schon $\omega_\varkappa$ als eine algebraische Funktion von weniger als den $\varkappa-1$ Integralfunktionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ der nachfolgenden Untersuchung zugrunde gelegt würde, so kann man aus der ersten Summe eines der Glieder absondern, welche die höchste Dimension in $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ besitzen, und die Gleichung durch den Koeffizienten dieses Gliedes dividieren, so daß (4) in

$$(5)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m \left[\omega_1^{\lambda'_1} \omega_2^{\lambda'_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda'_{\varkappa-1}} + \sum_{(\lambda)} r_{0\lambda}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\lambda_1} \omega_2^{\lambda_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}}\right] \\ &\qquad + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} r_{1\mu}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\mu_1} \omega_2^{\mu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &\qquad + \sum_{(\nu)} r_{m\nu}(x, y_1, \dots y_n)\, \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0 \end{aligned}\right.$$

übergeht, worin die Funktionen $r_{0\lambda}, r_{1\mu}, \dots r_{m\nu}$ *rationale* Funktionen von $x, y_1, \dots y_n$ sind, und

$$\lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}' \geq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}$$

ist.

Bezeichnet man nun durch das Symbol $\overline{\frac{dF}{dx}}$, wenn F eine beliebige Funktion von $x, y_1, \dots y_n$ bedeutet, den Ausdruck

$$\overline{\frac{dF}{dx}} = \frac{\partial F}{\partial x} + \sum_1^n \frac{\partial F}{\partial y_r} f_r,$$

der, wenn er identisch verschwindet, nach (2) die Funktion $F(x, y_1, \dots y_n)$ als eine Integralfunktion der Differentialgleichungen (1) definiert, so erhält man durch Anwendung dieses Symbols auf die Gleichung (5):

$$(6)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} \overline{\frac{dr_{0\lambda}}{dx}} \omega_1^{\lambda_1} \omega_2^{\lambda_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} \overline{\frac{dr_{1\mu}}{dx}} \omega_1^{\mu_1} \omega_2^{\mu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} \\ &\qquad + \cdots + \sum_{(\nu)} \overline{\frac{dr_{m\nu}}{dx}} \omega_1^{\nu_1} \omega_2^{\nu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\nu_{\varkappa-1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

oder, indem man wie in (5) in der ersten Summe wieder ein Glied mit der höchsten Dimension in $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ absondert und die Gleichung durch den in $x, y_1, \dots y_n$ und $f_1, f_2, \dots f_n$ rationalen Koeffizienten dividiert:

$$(7)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m \left[\omega_1^{\varrho_1'} \omega_2^{\varrho_2'} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\varrho_{\varkappa-1}'} + \sum_{(\varrho)} R_{0\varrho}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n) \omega_1^{\varrho_1} \omega_2^{\varrho_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\varrho_{\varkappa-1}}\right] \\ &\qquad + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\sigma)} R_{1\sigma}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n) \omega_1^{\sigma_1} \omega_2^{\sigma_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\sigma_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &\qquad + \sum_{(\tau)} R_{m\tau}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n) \omega_1^{\tau_1} \omega_2^{\tau_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\tau_{\varkappa-1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

worin die Funktionen R rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und

$$\varrho_1' + \varrho_2' + \cdots + \varrho_{\varkappa-1}' \leq \lambda_1' + \lambda_2' + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}'$$

ist. Ist der Koeffizient von $\omega_\varkappa^m$ in Gleichung (5) nur von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$, aber nicht von $x, y_1, \ldots y_n$ abhängig, oder ist $\frac{\overline{d\,r_{0\lambda}}}{d\,x} = 0$, d. h. sind die Funktionen $r_{0\lambda}$ in $x, y_1, \ldots y_n$ algebraisch rationale Integralfunktionen, so würde durch Anwendung des Symbols $\frac{\overline{d}}{d\,x}$ auf diese Gleichung die m^{te} Potenz von $\omega_\varkappa$ ganz herausfallen, und man würde zu einer Gleichung zwischen den $\varkappa$ Integralfunktionen gelangen, die in bezug auf $\omega_\varkappa$ schon vom m-1^{ten} Grade wäre, was wir aber auch im allgemeinen durch Fortsetzung des oben angewandten Verfahrens erreichen können. Wendet man nämlich, wie auf (5.), jetzt auf (7) wieder die Operation $\frac{\overline{d}}{d\,x}$ an, wobei zu bemerken, daß die partiellen Differentialquotienten der algebraischen Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ von $x, y_1, \ldots y_n$ rationale Funktionen von $x, y_1, \ldots y_n, f_1, f_2, \ldots f_n$ sind, und fährt so fort, die höchste Dimension des Koeffizienten von $\omega_\varkappa^m$ in bezug auf $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ zu erniedrigen, bis diese den Wert Null annimmt, so gelangt man zu einer Gleichung von der Form:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\alpha)} P_{1\alpha}(x, y_1, \ldots y_n, f_1, \ldots f_n)\, \omega_1^{\alpha_1} \omega_2^{\alpha_2} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\alpha_{\varkappa-1}} \\ &\quad + \omega_\varkappa^{m-2} \sum_{(\beta)} P_{2\beta}(x, y_1, \ldots y_n, f_1, \ldots f_n)\, \omega_1^{\beta_1} \omega_2^{\beta_2} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\beta_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &\quad\quad + \sum_{(\gamma)} P_{m\gamma}(x, y_1, \ldots y_n, f_1, \ldots f_n)\, \omega_1^{\gamma_1} \omega_2^{\gamma_2} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\gamma_{\varkappa-1}} = 0, \end{aligned}\right.$$

worin die P wieder rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind. Wird nun endlich auf (8) wiederum die Operation $\frac{\overline{d}}{d\,x}$ angewandt, so erhält man, da

$$\frac{\overline{d\,\omega_\varkappa^m}}{d\,x} = 0$$

ist, die der Gleichung (4) analoge Gleichung, welche in bezug auf $\omega_\varkappa$ nur vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade ist:

$$(9)\left\{\begin{aligned}&\omega_\varkappa^{m-1}\sum_{(\delta)}\mathfrak{g}_{1\delta}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n)\,\omega_1^{\delta_1}\,\omega_2^{\delta_2}\dots\omega_{\varkappa-1}^{\delta_{\varkappa-1}}\\&\quad+\omega_\varkappa^{m-2}\sum_{(\varepsilon)}\mathfrak{g}_{2\varepsilon}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n)\,\omega_1^{\varepsilon_1}\,\omega_2^{\varepsilon_2}\dots\omega_{\varkappa-1}^{\varepsilon_{\varkappa-1}}+\cdots\\&\quad+\sum_{(\eta)}\mathfrak{g}_{m\eta}(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n)\,\omega_1^{\eta_1}\,\omega_2^{\eta_2}\dots\omega_{\varkappa-1}^{\eta_{\varkappa-1}}=0\,,\end{aligned}\right.$$

in welcher die $\mathfrak{g}$ ganze Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und welche wiederum, wie oben durch Reduzierung von (4) auf (9), zu einer Gleichung führen wird, welche in bezug auf $\omega_\varkappa$ nur vom $m-2^{\text{ten}}$ Grade ist. Fährt man so fort, so gelangt man unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß $\omega_\varkappa$ nicht eine algebraische Funktion von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ ist, in welche die Variablen $x, y_1, \dots y_n$ nicht explizite eintreten, zu einer Gleichung der Form

$$(10)\qquad \omega_\varkappa-\sum_{(\vartheta)}\mathfrak{R}_\vartheta(x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n)\,\omega_1^{\vartheta_1}\,\omega_2^{\vartheta_2}\dots\omega_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}}=0\,,$$

worin die $\mathfrak{R}$ wiederum rationale Funktionen sind. Was nun die Natur dieser rationalen Funktionen in Rücksicht auf das Differentialgleichungssystem (1) angeht, so ergibt sich durch Anwendung des Symbols $\dfrac{\overline{d}}{dx}$ auf die Gleichung (10):

$$\sum_{(\vartheta)}\frac{\overline{d\,\mathfrak{R}_\vartheta}}{dx}\,\omega_1^{\vartheta_1}\,\omega_2^{\vartheta_2}\dots\omega_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}}=0\,,$$

und da angenommen wurde, daß nicht schon zwischen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ und $x, y_1, y_2, \dots y_n$ eine algebraische Beziehung bestehen sollte:

$$\frac{\overline{d\,\mathfrak{R}_\vartheta}}{dx}=0\,;$$

es sind somit nach (2) die Funktionen R_ϑ in der Gleichung (10) algebraische Integralfunktionen der Differentialgleichungen (1), und zwar rational zusammengesetzt aus den Variabeln $x, y_1, \dots y_n$ und den in diesen Variabeln algebraischen Funktionen $f_1, f_2, \dots f_n$ der rechten Seiten der Differentialgleichungen.

Für den Fall, daß man bei der Reduktion von (6) auf eine Gleichung stößt, welche die Form hat:

$$(11)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^p \sum_{(\vartheta)} T_\vartheta\, \omega_1^{\vartheta_1} \omega_2^{\vartheta_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}} + \omega_\varkappa^q \sum_{(\zeta)} U_\zeta\, \omega_1^{\zeta_1} \omega_2^{\zeta_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\zeta_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &\qquad\qquad + \sum_{(\zeta)} S_\zeta\, \omega_1^{\zeta_1} \omega_2^{\zeta_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\zeta_{\varkappa-1}} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

worin $p, q, \dots$ positive ganze Zahlen $\leq m$ sind, so würde, wenn $\frac{\overline{d\,T_\vartheta}}{d\,x} = 0$, $\frac{\overline{d\,U_\zeta}}{d\,x} = 0, \dots$, also die in $x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n$ rationalen Funktionen $T_\vartheta, U_\zeta, \dots$ algebraische Integralfunktionen wären, die durch das Symbol $\frac{\overline{d}}{d\,x}$ charakterisierte Operation

$$\frac{\overline{d\,S_\zeta}}{d\,x} = 0$$

liefern, also wieder S_ζ als algebraische, in $x, y_1, \dots y_n, f_1, \dots f_n$ rationale Integralfunktionen kennzeichnen, während sich jedoch nach (11) nicht wie oben in (10) $\omega_\varkappa$ als ganze Funktion von $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_{\varkappa-1}$ ergibt. Wir finden somit,

daß, wenn $\varkappa$ transzendente oder algebraische Integralfunktionen des Differentialgleichungssystems (1) in einer von den Variabeln $x, y_1, y_2, \dots y_n$ abhängigen algebraischen Beziehung zueinander stehen, und nicht schon eine solche zwischen weniger als $\varkappa$ dieser Integralfunktionen existiert, dann eine jede derselben eine ganze Funktion der andern oder die Wurzel einer algebraischen Gleichung in diesen Größen ist, deren Koeffizienten algebraische Integralfunktionen dieser Differentialgleichungen sind, welche rational aus den Variabeln $x, y_1, \dots y_n$ und den algebraischen Funktionen $f_1, f_2, \dots f_n$ der rechten Seiten der Differentialgleichungen zusammengesetzt sind.

Für das homogene lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$
(12)\left\{
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 + \cdots + a_{1n}\, y_n \\
\frac{dy_2}{dx} &= a_{21}\, y_1 + a_{22}\, y_2 + \cdots + a_{2n}\, y_n \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= a_{n1}\, y_1 + a_{n2}\, y_2 + \cdots + a_{nn}\, y_n
\end{aligned}
\right.
$$

ist bekanntlich, wenn die Gleichung n^{ten} Grades

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} - m & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} - m & \cdots & a_{2m} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - m
\end{vmatrix} = 0
$$

die Lösungen m_1 $\varkappa_1$-fach, m_2 $\varkappa_2$-fach, $\ldots m_\varrho$ $\varkappa_\varrho$-fach enthält, so daß $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_\varrho = n$ ist, das allgemeine Integralsystem in der Form enthalten:

$$
(13)\left\{
\begin{aligned}
y_a = &\left(c_{11} f_{11}^{(a)} + c_{12} f_{12}^{(a)} + \cdots + c_{1\varkappa_1} f_{1\varkappa_1}^{(a)}\right) e^{m_1 x} + \left(c_{21} f_{21}^{(a)} + \cdots + c_{2\varkappa_2} f_{2\varkappa_2}^{(a)}\right) e^{m_2 x} \\
&+ \cdots + \left(c_{\varrho 1} f_{\varrho 1}^{(a)} + c_{\varrho 2} f_{\varrho 2}^{(a)} + \cdots + c_{\varrho \varkappa_\varrho} f_{\varrho \varkappa_\varrho}^{(a)}\right) e^{m_\varrho x} \qquad (a = 1, 2, \ldots n),
\end{aligned}
\right.
$$

worin die Funktionen $f_{\beta\gamma}^{(a)}$ ganze Funktionen von x vom $\varkappa_\beta - 1^{\text{ten}}$ Grade sind.

Aus den hieraus sich ergebenden Beziehungen

$$
(14)\quad c_{\mu\lambda_\mu}\, e^{m_\mu x} = F_{1\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_1 + F_{2\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_2 + \cdots + F_{n\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_n \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \varrho \\ \lambda_\mu = 1, 2, \ldots \varkappa_\mu \end{pmatrix},
$$

in denen die F rationale Funktionen von x sind, folgen die n Integralfunktionen

$$
(15)\quad \omega_{\mu\lambda_\mu} = \left(F_{1\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_1 + F_{2\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_2 + \cdots + F_{n\lambda_\mu}^{(\mu)}\, y_n\right) e^{-m_\mu x} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \varrho \\ \lambda_\mu = 1, 2, \ldots \varkappa_\mu \end{pmatrix},
$$

und eine algebraische Beziehung zwischen diesen Integralfunktionen würde eine ebensolche Beziehung zwischen den Exponentialfunktionen

$$e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \dots e^{m_\varrho x}$$

und der Variabeln x erfordern.

Besteht aber eine algebraische Gleichung von der Form

$$(16)\left\{\begin{array}{l} g_0\left(x, e^{m_1 x}, \dots e^{m_{\varrho-1} x}\right)\left(e^{m_\varrho x}\right)^n + \dots + g_\gamma\left(x, e^{m_1 x}, \dots e^{m_{\varrho-1} x}\right)\left(e^{m_\varrho x}\right)^{n-\gamma} \\ \qquad\qquad + \dots + g_n\left(x, e^{m_1 x}, \dots e^{m_{\varrho-1} x}\right) = 0, \end{array}\right.$$

worin die Funktionen g ganze Funktionen der eingeschlossenen Größen darstellen, und g_γ der erste nicht verschwindende Koeffizient der Gleichung ist, werde ferner einerseits angenommen, daß nicht schon zwischen den Exponentialfunktionen $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \dots e^{m_{\varrho-1} x}$ und x eine algebraische Beziehung besteht — in welchem Falle $e^{m_\varrho x}$ schon von weniger dieser Exponentialfunktionen und x algebraisch abhinge —, anderseits, daß die Gleichung (16) mit Adjungierung der Argumente der g-Funktionen irreduktibel sei, so wird sich, wenn in (16) x durch $x + \frac{2\pi i}{m_1}$ ersetzt wird, die Gleichung ergeben:

$$(17)\left\{\begin{array}{l} g_0\left(x + \frac{2\pi i}{m_1}, e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \dots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right) \\ \qquad\qquad \times \left(e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}}\right)^n \left(e^{m_\varrho x}\right)^n \\ + \dots + g_\gamma\left(x + \frac{2\pi i}{m_1}, e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \dots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right) \\ \qquad\qquad \times \left(e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}}\right)^{n-\gamma} \left(e^{m_\varrho x}\right)^{n-\gamma} + \dots = 0, \end{array}\right.$$

und aus (16) und (17) durch Elimination von $\left(e^{m_\varrho x}\right)^n$ mit Rücksicht auf die vorausgesetzte Irreduktibilität von (16):

$$
(17)\left\{\begin{aligned}
&g_0\left(x, e^{m_1 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right)\\
&\times g_\gamma\left(x+\frac{2\pi i}{m_1}, e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \ldots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right)\\
&-g_\gamma\left(x, e^{m_1 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right)\\
&\times g_0\left(x+\frac{2\pi i}{m_1}, e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \ldots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right) e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}\gamma}=0,
\end{aligned}\right.
$$

oder, wenn

$$
\frac{g_\gamma\left(x, e^{m_1 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right)}{g_0\left(x, e^{m_1 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right)} = r_\gamma\left(x, e^{m_1 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right)
$$

gesetzt wird:

$$
(18)\left\{\begin{aligned}
&r_\gamma\left(x+\frac{2\pi i}{m_1}, e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \ldots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right)\\
&\qquad = e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}\gamma}\, r_\gamma\left(x, e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right),
\end{aligned}\right.
$$

worin γ eine der positiven ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots n-1$, und r_γ eine rationale Funktion der Argumente ist.

Da aber oben vorausgesetzt wurde, daß nicht schon zwischen $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}$ und x eine algebraische Beziehung stattfinden sollte, so wird diese Gleichung in den Exponentialgrößen identisch sein müssen, und somit in

$$
R\left(x+\frac{2\pi i}{m_1}\right) = e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}\gamma} R(x)
$$

übergehen, worin R eine rationale Funktion darstellt; die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der Ableitung derselben würde für die rationale Funktion $\frac{R'(x)}{R(x)}$ die Periode $\frac{2\pi i}{m_1}$ liefern, und daraus folgen, daß in der Gleichung (18) die Variable x nicht explizite vorkommen kann, diese Gleichung also in

$$(19)\left\{\begin{aligned} & r_\gamma\left(e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}, \ldots e^{2\pi i \frac{m_{\varrho-1}}{m_1}} e^{m_{\varrho-1} x}\right) \\ & \qquad = e^{2\pi i \frac{m_\varrho}{m_1}\gamma}\, r_\gamma\left(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \ldots e^{m_{\varrho-1} x}\right) \end{aligned}\right.$$

übergeht.

Für den einfachsten Fall, in welchem $\varrho=2$ ist, folgt aus der Gleichung

$$r_\gamma\left(e^{m_1 x}\right) = r_\gamma\left(e^{m_1 x}\right) e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}\gamma} \quad \text{oder} \quad e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}\gamma} = 1,$$

daß

$$m_2 = \frac{m_1}{\gamma}\varkappa$$

sein muß, worin γ und $\varkappa$ ganze Zahlen sind, von denen γ positiv ist, und daß somit die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen zwei Exponentialgrößen $e^{m_1 x}$ und $e^{m_2 x}$ die Form hat:

$$(20) \qquad e^{m_2 x} = \left(e^{m_1 x}\right)^{\frac{\varkappa}{\gamma}}.$$

Für $\varrho=3$ geht die Gleichung (19) über in:

$$(21) \qquad r_\gamma\left(e^{m_1 x}, e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}\right) = e^{2\pi i \frac{m_3}{m_1}\gamma}\, r_\gamma\left(e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\right),$$

und muß, da nicht schon eine algebraische Beziehung zwischen $e^{m_1 x}$ und $e^{m_2 x}$ bestehen sollte, in diesen beiden Größen identisch sein; indem man für $e^{m_1 x}$ eine beliebige Konstante gesetzt denkt, wird dieselbe die Form annehmen:

$$\frac{g_\gamma\left(e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}\right)}{g_0\left(e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}\right)} = e^{2\pi i \frac{m_3}{m_1}\gamma}\, \frac{g_\gamma\left(e^{m_2 x}\right)}{g_0\left(e^{m_2 x}\right)},$$

worin g_γ und g_0 ganze Funktionen sind, oder, da, wie leicht ersichtlich, g_γ durch g_0 teilbar eine ganze Funktion G sein muß:

$$G\left(e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1}} e^{m_2 x}\right) = e^{2\pi i \frac{m_3}{m_1}\gamma} G\left(e^{m_2 x}\right). \tag{22}$$

Stellt man die Funktion G in der Form dar:

$$G\left(e^{m_2 x}\right) = \sum_r A_r \left(e^{m_2 x}\right)^r,$$

so daß (22) in

$$\sum_r A_r e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1} r} \left(e^{m_2 x}\right)^r = e^{2\pi i \frac{m_3}{m_1}\gamma} \sum_r A_r \left(e^{m_2 x}\right)^r$$

übergeht, so folgt für ganzzahlige positive Werte von r:

$$e^{2\pi i \frac{m_2}{m_1} r} = e^{2\pi i \frac{m_3}{m_1}\gamma},$$

und hieraus die Beziehung:

$$m_2 r - m_3 \gamma = m_1 \varkappa, \tag{23}$$

worin $\varkappa$, r und γ ganze Zahlen sind; aus (23) folgt unmittelbar, daß

$$e^{m_3 x} = A\left(e^{m_1 x}\right)^{-\frac{\varkappa}{\gamma}} \left(e^{m_2 x}\right)^{\frac{r}{\gamma}} \tag{24}$$

ist.

Die allgemeinste algebraische Beziehung zwischen den drei Exponentialfunktionen $e^{m_1 x}$, $e^{m_2 x}$, $e^{m_3 x}$ lautet somit

$$e^{m_3 x} = A\left(e^{m_1 x}\right)^{\frac{r}{\gamma}} \left(e^{m_2 x}\right)^{\frac{s}{\gamma}},$$

worin r, s, γ ganze Zahlen sind, für welche die Beziehung besteht:

$$m_3 \gamma = m_1 r + m_2 s.$$

Allgemein folgt ebenso, *daß, wenn die Exponentialfunktionen* $e^{m_1 x}, e^{m_2 x}, \dots e^{m_\varrho x}$ *algebraisch voneinander abhängen, die Variable* x *in dieser Beziehung nicht explizite vorkommen kann, und diese selbst die Form haben muß:*

$$(25) \qquad \left(e^{m_1 x}\right)^{c_1} \left(e^{m_2 x}\right)^{c_2} \dots \left(e^{m_\varrho x}\right)^{c_\varrho} = C,$$

worin $c_1, c_2, \dots c_\varrho$ *rationale Konstanten,* C *ebenfalls konstant ist, und* $m_1, m_2, \dots m_\varrho$ *durch die Gleichung miteinander verbunden sind:*

$$c_1 m_1 + c_2 m_2 + \dots + c_\varrho m_\varrho = 0 .$$

Soll also zwischen den Integralfunktionen $\omega_{\mu \lambda_\mu}$ *des Differentialgleichungssystems* (12) *eine algebraische Beziehung stattfinden, also nach* (15) *eine ebensolche für* $e^{-m_1 x}, e^{-m_2 x}, \dots e^{-m_\varrho x}$, *so muß diese die Form haben:*

$$\prod_{1}^{\varkappa_\mu}{}_{\lambda_\mu} \prod_{1}^{\varrho}{}_{\mu} \left(\frac{\omega_{\mu \lambda_\mu}}{F_{1 \lambda_\mu}^{(\mu)} y_1 + F_{2 \lambda_\mu}^{(\mu)} y_2 + \dots + F_{n \lambda_\mu}^{(\mu)} y_n} \right)^{c_\mu} = C .$$

Da aber

$$\prod_{1}^{\varkappa_\mu}{}_{\lambda_\mu} \prod_{1}^{\varrho}{}_{\mu} \omega_{\mu \lambda_\mu} = \Omega$$

wieder eine Integralfunktion des Systems (12) ist, so *wird auch*

$$\Omega = \prod_{1}^{\varkappa_\mu}{}_{\lambda_\mu} \prod_{1}^{\varrho}{}_{\mu} \left(F_{1 \lambda_\mu}^{(\mu)} y_1 + F_{2 \lambda_\mu}^{(\mu)} y_2 + \dots + F_{n \lambda_\mu}^{(\mu)} y_n\right)^{c_\mu}$$

eine algebraische Integralfunktion jener Differentialgleichungen sein.

Sei z. B. das Differentialgleichungssystem (12) von zweiter Ordnung, also

$$
(26)\quad \begin{cases} \dfrac{d y_1}{d x} = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\[2ex] \dfrac{d y_2}{d x} = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 , \end{cases}
$$

worin $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ Konstanten sind, und dessen allgemeines Integralsystem, wenn m_1 und m_2 die verschiedenen Lösungen der quadratischen Gleichung

$$
m^2 - (a_{11} + a_{22}) m + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0 ,
$$

und c_1, c_2 willkürliche Konstanten sind, durch

$$
(27)\quad \begin{cases} y_1 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 \dfrac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} e^{m_2 x} \\[2ex] y_2 = c_1 \dfrac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} \end{cases}
$$

dargestellt ist. Da sich aus diesen beiden Gleichungen

$$
y_1 - \frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} y_2 = c_1 \left(1 - \frac{(m_1 - a_{11})(m_2 - a_{22})}{a_{12} a_{21}}\right) e^{m_1 x}
$$

$$
y_1 \frac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} - y_2 = - c_2 \left(1 - \frac{(m_1 - a_{11})(m_2 - a_{22})}{a_{12} a_{21}}\right) e^{m_2 x}
$$

ergibt, so werden

$$
(28)\quad \begin{cases} \omega_1 = \left(y_1 - \dfrac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} y_2\right) e^{-m_1 x} \\[2ex] \omega_2 = \left(y_1 \dfrac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} - y_2\right) e^{-m_2 x} \end{cases}
$$

Integralfunktionen von (26) sein.

Ist $e^{m_2 x}$ eine algebraische Funktion von $e^{m_1 x}$, dann wird nach (28) auch ω_2 mit Hinzuziehung von y_1 und y_2 eine algebraische Funktion von ω_1 sein, und da ersteres nur der Fall sein kann, wenn m_2 ein rationales Vielfaches von m_1 ist, so wird, wenn $m_2 = \varkappa m_1$ gesetzt wird:

$$\frac{\omega_2}{y_1 \dfrac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} - y_2} = \frac{\omega_1^\varkappa}{\left(y_1 - \dfrac{m_1 - a_{22}}{a_{21}} y_2\right)^\varkappa},$$

und daher, wie vorher gezeigt, und auch aus (14) unmittelbar ersichtlich:

$$\Omega = \frac{y_1 \dfrac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} - y_2}{\left(y_1 - \dfrac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} y_2\right)^\varkappa} \tag{29}$$

eine algebraische Integralfunktion sein. Da sich nunmehr aus der quadratischen Gleichung in m:

$$(\varkappa + 1) m_1 = a_{11} + a_{22}, \quad \varkappa m_1^2 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21},$$

und somit nach eben dieser Gleichung zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichungen (26) die Beziehung ergibt:

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 - \frac{\varkappa^2 + 1}{\varkappa} a_{11} a_{22} + \frac{(\varkappa + 1)^2}{\varkappa} a_{12} a_{21} = 0,$$

während

$$m_1 = \frac{a_{11} + a_{22}}{\varkappa + 1}, \quad m_2 = \frac{\varkappa (a_{11} + a_{22})}{\varkappa + 1} \tag{30}$$

ist, so geht (29) in

$$\Omega = \frac{y_1(-\varkappa a_{11} + a_{22}) - (\varkappa + 1) a_{12} y_2}{((\varkappa + 1) a_{21} y_1 - (\varkappa a_{11} - a_{22}) y_2)^\varkappa} \tag{31}$$

über, und, da $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$, ferner

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + a_{12} y_2)$$

$$= \frac{\{[(\varkappa-1)(\varkappa+1) a_{21}(\varkappa a_{11} - a_{22})] y_1 + [(\varkappa a_{11} - a_{22})^2 + \varkappa(\varkappa+1)^2 a_{12} a_{21}] y_2\}\{a_{11} y_1 + a_{12} y_2\}}{[(\varkappa+1) a_{21} y_1 - (\varkappa a_{11} - a_{22}) y_2]^{\varkappa+1}}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_2}(a_{21} y_1 + a_{22} y_2)$$

$$= \frac{\{[-(\varkappa+1)^2 a_{12} a_{21} - \varkappa(\varkappa a_{11} - a_{22})^2] y_1 + [-(\varkappa-1)(\varkappa+1) a_{12}(\varkappa a_{11} - a_{22})] y_2\}\{a_{21} y_1 + a_{22} y_2\}}{[(\varkappa+1) a_{21} y_1 - (\varkappa a_{11} - a_{22}) y_2]^{\varkappa+1}}$$

ist, wie unmittelbar zu sehen:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}(a_{11} y_1 + a_{12} y_2) + \frac{\partial \Omega}{\partial y_2}(a_{21} y_1 + a_{22} y_2) = 0,$$

somit, wie oben allgemein gefunden, Ω eine in y_1 und y_2 algebraische Integralfunktion der Differentialgleichungen (26). Das allgemeine Integralsystem dieser Differentialgleichungen muß sich somit auch aus den Gleichungen

$$\omega_1 = c, \quad \Omega = C$$

ergeben, wenn c und C willkürliche Konstanten bedeuten. In der Tat folgt nach (28) und (29):

$$y_1 - \frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} y_2 = c\, e^{m_1 x}$$

$$y_1 \frac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} - y_2 = \left(y_1 - \frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} y_2\right)^{\varkappa} C = C c^{\varkappa} e^{\varkappa m_1 x} = C c^{\varkappa} e^{m_2 x},$$

und hieraus, wenn

$$c = c_1\left(1 - \frac{m_1 - a_{11}}{a_{12}}\,\frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}}\right), \quad -C\,c^{\varkappa} = c_2\left(1 - \frac{m_1 - a_{11}}{a_{12}}\,\frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}}\right)$$

gesetzt wird:

$$y_1 = c_1 e^{m_1 x} + c_2 \frac{m_2 - a_{22}}{a_{21}} e^{m_2 x}, \quad y_2 = c_1 \frac{m_1 - a_{11}}{a_{12}} e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x},$$

wie oben, wo sich das allgemeine Integralsystem aus den beiden transzendenten Integralfunktionen ω_1 und ω_2 ergab, während es hier aus einer transzendenten und einer algebraischen Integralfunktion hergeleitet wurde.

Für den Fall, daß die quadratische Gleichung in m zwei gleiche Lösungen besitzt, also zwischen den Koeffizienten der Differentialgleichungen (26) die Beziehung besteht:

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12} a_{21} = 0,$$

ist das allgemeine Integralsystem in der Form enthalten:

$$y_1 = \left[c_1 + c_2 \frac{(a_{11} - a_{22})\,x + 2}{2\,a_{21}}\right] e^{\frac{a_{11}+a_{22}}{2} x}$$

$$y_2 = \left[c_1 \frac{a_{22} - a_{11}}{2\,a_{12}} + c_2\,x\right] e^{\frac{a_{11}+a_{22}}{2} x},$$

und es sind somit die beiden transzendenten Integralfunktionen

$$\omega_1 = \left[2 a_{21}\,x\,y_1 - \left((a_{11} - a_{22})\,x + 2\right) y_2\right] e^{-\frac{a_{11}+a_{22}}{2} x}$$

$$\omega_2 = \left[(a_{11} - a_{22})\,y_1 + 2 a_{12}\,y_2\right] e^{-\frac{a_{11}+a_{22}}{2} x},$$

aus denen sich die algebraische Integralfunktion

$$\Omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{2\,a_{12}\,x\,y_1 - \big((a_{11} - a_{22})\,x + 2\big)\,y_2}{(a_{11} - a_{22})\,y_1 + 2\,a_{12}\,y_2}$$

ergibt, welche in der Tat, wie unmittelbar zu sehen, der Gleichung

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}\big(a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2\big) + \frac{\partial \Omega}{\partial y_2}\big(a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2\big)$$

identisch genügt.